第27卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 5
2010年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0943-04

广义 Pascal 矩阵及其代数性质*

汪 祥, 廖 旦, 朱传喜

(南昌大学理学院数学系，南昌 330031)

摘 要: Pascal 矩阵及其推广形式的代数性质的研究在电子工程、组合数学、快速算法、微分方程数值解等领域有着广泛的应用。本文利用多项式空间基变换的方法，新给出了几类广义 Pascal 矩阵，即广义左-Pascal 矩阵、广义右-Pascal 矩阵和推广的广义 Pascal 矩阵的一些代数性质的简洁证明，同时给出了这几类广义 Pascal 矩阵一些新的代数性质。

关键词: Pascal 矩阵；多项式；基变换；代数性质

分类号: **AMS**(2000) 05A19; 05A10 **中图分类号**: O241.7; O241.6; O151.2 **文献标识码**: A

1 引言

Pascal 矩阵有着悠久的历史，早在1303年，国外的数学家便给出了其定义。在中国，500多年前数学家杨辉也给出了其定义，因此在中国 Pascal 矩阵又被称为“杨辉三角”。Pascal 矩阵在众多领域有着广泛的应用，例如组合论、概率论、线性代数[1]、电子工程[2]、序列统计[3]等。近年来，国内外众多学者对 Pascal 矩阵及其推广形式的相关代数性质和组合性质进行了研究[4-13]。然而，迄今为止，研究广义 Pascal 矩阵的相关代数性质均是利用组合数学中的一些恒等式来研究的。本文利用多项式空间不同基之间的关系，研究给出了广义左-Pascal 矩阵、广义右-Pascal 矩阵和推广的广义 Pascal 矩阵的一些代数性质，并更正了文献[13]中的一处错误。

2 定义与记号

定义 1 $n+1$ 阶下三角 Pascal 矩阵 P_n 定义如下

$$P_n(i,j)=\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \quad i,j=0,1,\cdots,n, \tag{1}$$

其中，当 $j>i$ 时，$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}=0$。

定义 2[6] 设 x, y 为两个任意非零的实数，推广的广义 Pascal 矩阵 $\Psi_n(x,y)$ 为

$$\Psi_n(x,y;i,j)=x^{i-j}y^{i+j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \quad i,j=0,1,\cdots,n, \tag{2}$$

收稿日期: 2008-11-24. **作者简介**: 汪祥 (1980年10月生)，男，博士，副教授. 研究方向：数值线性代数、矩阵论、结构矩阵的快速算法.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10761007)；江西省自然科学基金 (2007GQS2063)；江西省教育厅青年科学基金 (GJJ09450).

容易看出

$$\Psi_n\Big(-x,\ \frac{1}{y}\Big)=\Psi_n\Big(x,\ -\frac{1}{y}\Big).$$

定义 3[13] 设 x, y 为两个任意非零的实数，广义左-Pascal 矩阵 $\Phi_n(x,y)$ 为

$$\Phi_n(x,y;i,j)=x^{i-j}y^j\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix},\quad i,j=0,1,\cdots,n. \tag{3}$$

定义 4[13] 设 x, y 为两个任意非零的实数，广义右-Pascal 矩阵 $\Omega_n(x,y)$ 为

$$\Omega_n(x,y;i,j)=x^{n-j}y^{i+j-n}\begin{pmatrix} i \\ n-j \end{pmatrix},\quad i,j=0,1,\cdots,n, \tag{4}$$

显然，当 $x=1,\ y=1$ 时，$\Psi_n(1,1)=\Psi_n(1,1)=\Omega_n(1,1)=P_n$。

定义 5 设 x, y 为两个任意非零的实数，广义上-Pascal 矩阵 $\Gamma_n(x,y)$ 为

$$\Gamma_n(x,y;i,j)=x^{n-i-j}y^j\begin{pmatrix} i \\ n-j \end{pmatrix},\quad i,j=0,1,\cdots,n. \tag{5}$$

记 $R[t]_n$ 为实数域上关于 t 的次数不超过 n 的多项式全体。

3 主要结论

在文献 [13] 中，作者利用组合恒等式的方法给出了如下的结果

$$\Phi_n^{-1}(x,y)=\Phi_n\Big(-x,\ \frac{1}{y}\Big).$$

容易验证该等式是不成立的，下面我们将通过一种简单直观的方法即多项式空间的基变换的方法来证明下面定理。

定理 1[13] 广义左-Pascal 矩阵 $\Phi_n(x,y)$ 的逆矩阵为

$$\Phi_n^{-1}(x,y)=\Phi_n\Big(-\frac{x}{y},\ \frac{1}{y}\Big).$$

证明 由于 $R[t]_n$ 是实数域上关于 t 的次数不超过 n 的多项式全体，则 $\{1,t,t^2,\cdots,t^n\}$ 为 $R[t]_n$ 的一组基。显然，当 x, y 为两个任意非零的实数时，$\{1,\ x+yt,\ (x+yt)^2,\ \cdots,\ (x+yt)^n\}$ 也是空间 $R[t]_n$ 的一组基。下面考虑这两组基之间的关系：

由于

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x+yt \\ (x+yt)^2 \\ \vdots \\ (x+yt)^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & 2xy & y^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x^n & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}x^{n-1}y & \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}x^{n-2}y^2 & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}y^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}=\Phi_n(x,y)\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix},$$

因此，从基 $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ 到基 $\{1,\ x+yt,\ (x+yt)^2,\ \cdots,\ (x+yt)^n\}$ 的过渡矩阵为 $\Phi_n(x,y)$，简记为

$$\{\,1,\ t,\ \cdots,\ t^n\,\} \xrightarrow{\Phi_n(x,y)} \{\,1,\ x+yt,\ \cdots,\ (x+yt)^n\,\}. \tag{6}$$

类似地可得

$$\{\,1,\ x+yt,\ \cdots,\ (x+yt)^n\,\} \xrightarrow{\Phi_n(\frac{-x}{y},\frac{1}{y})} \{1,\ t,\ \cdots,\ t^n\,\}, \tag{7}$$

故

$$\Phi_n^{-1}(x,y) = \Phi_n\Big(-\frac{x}{y},\ \frac{1}{y}\Big).$$

定理 2[4] (封闭性)　设 p, q, u, v 为非零实数，则 $\Phi_n(p,q)\Phi_n(u,v) = \Phi_n(p+qu, qv)$。

证明　因为

$$\{1,t,\cdots,t^n\} \xrightarrow{\Phi_n(u,v)} \{1,u+vt,\cdots,(u+vt)^n\} \xrightarrow{\Phi_n(p,q)} \{1,p+qu+qvt,\cdots,(p+qu+qvt)^n\},$$

又

$$\{1,t,\cdots,t^n\} \xrightarrow{\Phi_n(p+qu,qv)} \{1,p+qu+qvt,\cdots,(p+qu+qvt)^n\},$$

故有 $\Phi_n(p,q)\Phi_n(u,v) = \Phi_n(p+qu,qv)$。

推论 1[13]　$\Phi_n^k(x,y) = \Phi_n(x(1+y+y^2+\cdots+y^{k-1}),y^k)$。

定理 3　广义右-Pascal 矩阵 $\Omega_n(x,y)$ 的逆矩阵为

$$\Omega_n^{-1}(x,y) = \Gamma_n\Big(\frac{-y}{x},\ \frac{1}{x}\Big), \tag{8}$$

即广义右-Pascal 矩阵的逆矩阵为一个广义上-Pascal 矩阵。

证明　由于

$$\begin{aligned}&\{t^n,t^{n-1},\cdots,1\} \xrightarrow{\Omega_n(x,y)} \{1,y+xt,\cdots,(y+xt)^n\},\\ &\{1,y+xt,\cdots,(y+xt)^n\} \xrightarrow{\Gamma_n(\frac{-y}{x},\frac{1}{x})} \{t^n,t^{n-1},\cdots,1\},\end{aligned} \tag{9}$$

故

$$\Omega_n^{-1}(x,y) = \Gamma_n\Big(\frac{-y}{x},\ \frac{1}{x}\Big).$$

定理 4　广义左-Pascal 矩阵 $\Phi_n(x,y)$ 与广义右-Pascal 矩阵 $\Omega_n(x,y)$ 有如下关系

$$\Omega_n(x,y) = \Phi_n(x,y)\Omega_n(0,1). \tag{10}$$

证明　由于 $\{1,t,\cdots,t^n\} \xrightarrow{\Gamma_n(0,1)} \{t^n,t^{n-1},\cdots,1\}$，再由 (6) 式和 (9) 式即可证。

定理 5[6]　推广的广义 Pascal 矩阵 $\Psi_n(x,y)$ 的逆矩阵为

$$\Psi_n^{-1}(x,y) = \Psi_n\Big(-x,\ \frac{1}{y}\Big) = \Psi_n\Big(x,\ -\frac{1}{y}\Big).$$

证明　因为

$$\{1,t,\cdots,t^n\} \xrightarrow{\Psi_n(x,y)} \{1,y(x+yt),\cdots,y^n(x+yt)^n\},$$

$$\{1,y(x+yt),\cdots,y^n(x+yt)^n\} \xrightarrow{\Psi_n(-x,\frac{1}{y})} \{1,t,\cdots,t^n\},$$

故

$$\Psi_n^{-1}(x,y) = \Psi_n\Big(-x,\ \frac{1}{y}\Big) = \Psi_n\Big(x,\ -\frac{1}{y}\Big).$$

注 在文献[4]中，作者定义了两类广义Pascal矩阵即第一类广义Pascal矩阵和第二类广义Pascal矩阵，并利用组合恒等式的方法证明了这两类广义Pascal矩阵的一些代数性质。同样，若利用本文中所介绍的基变换的方法，可以较简单、直观地给出其证明，且可以很容易地导出这两类矩阵的一些新的代数性质。

参考文献:

[1] Call G S, Velleman D J. Pascal's matrices[J]. Amer Math Monthly, 1993, 100: 372-376

[2] Biolkiva V, Biolek D. Generalized Pascal matrix of first-order S-Z transforms[C]// ECECS'99 Pafos, Cyprus 1999: 13-23

[3] Rita A, Lamoureux M P. Inverting the Pascal matrix plus one[J]. American Mathematics Monthly, 2001, 109: 371-377

[4] Zhang Z Z. The linear algebra of the generalized Pascal matrix[J]. Linear Algebra and its Applications, 1997, 250: 51-60

[5] Zhang Z Z, Wang T M. Generalized Pascal matrix and recurrence sequences[J]. Linear Algebra and its Applications, 1998, 283: 289-299

[6] Zhang Z Z, Liu M X. An extension of the generalized Pascal matrix and its algebraic properties[J]. Linear Algebra and its Applications, 1998, 271: 169-177

[7] Bayat M, Teimoori H. The linear algebra of the generalized Pascal functional matrix[J]. Linear Algebra and its Applications, 1999, 295: 81-89

[8] Yang Y Z, Catherine Micek. Generalized Pascal functional matrix and its applications[J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 423: 230-245

[9] Zhao X Q, Wang T M. The algebraic properties of the generalized Pascal functional matrices associated with the exponential families[J]. Linear Algebra and its Applications, 2000, 318: 45-52

[10] Yang S L. Pascal triangle and Pascal matrices[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(2): 96-100

[11] Cheon G S, Moawwad E M. Extended symmetric Pascal matrices via hyper-geometric functions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 158: 159-168

[12] Brawer R, Pirovino M. The linear algebra of the Pascal matrix[J]. Linear Algebra and its Applications, 1992, 174: 13-23

[13] 张之正，刘麦学. 广义Pascal矩阵代数结构及性质[J]. 大连理工大学学报，2000, 40(6): 638-641
Zhang Z Z, Liu M X. Algebraic structure and properties of generalized Pascal matrices[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2000, 40(6): 638-641

Generalized Pascal Matrices and Their Algebraic Properties

WANG Xiang, LIAO Dan, ZHU Chuan-xi

(Department of Mathematics, School of Science, Nanchang University, Nanchang 330031)

Abstract: The algebraic property of Pascal matrices and its generalized forms have wide applications in electronic engineering, combinatorics, fast algorithm, and numerical solutions to differential equations. By means of the basis transformation in polynomial space, a new and simplified proof is presented for the algebraic properties of some generalized Pascal matrices, i.e., the generalized left Pascal matrices, the generalized right Pascal matrices and the extended generalized Pascal matrices. Moreover, some new algebraic properties of these matrices are given.

Keywords: Pascal matrices; polynomial; basis transformation; algebraic properties

Received: 24 Nov 2008. **Accepted:** 29 Apr 2009.

Foundation item: the National Natural Science Foundation of China (10761007); the Natural Science Foundation of Jiangxi Province (2007GQS2063); the Youth Science Foundation of the Education Department of Jiangxi Province (GJJ09450).